10 décembre - Mathieu Plancke

Soit(a_n) la suite telle que $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ si a_n est un carré parfait et $a_n + 3$ sinon. Montrons que les a_0 tels que 3 apparaisse une infinité de fois dans (a_n) sont exactement les multiples de 3.

Si a_0 n'est pas un multiple de 3, alors $a_0 \equiv 1 \pmod 3$ ou $a_0 \equiv 2 \pmod 3$.
Si $a_0 \equiv 2 \pmod 3$ alors a_0 n'est pas un carré parfait car les carrés modulo 3 sont $0, 1$ et comme $a_{n+1} \equiv a_n \pmod 3$, tous les termes de la suite sont congrus à 2 modulo 3 par récurrence immédiate et ne sont jamais des carrés, la suite est strictement croissante, et donc 3 n'est jamais atteint.
Si $a_0 \equiv 1 \pmod 3$, il peut être un carré parfait, mais dans ce cas sa racine est congrue à 1 ou 2 modulo 3. Ainsi, tous les termes de la suite sont soit congrus à 2 soit à 1 modulo 3 (puisque après on avance de 3 en 3 le reste du temps, ce qui ne change pas le reste). Ils ne sont donc jamais divisibles par 3, et 3 n'est jamais atteint.

Ainsi, si 3 apparait une infinité de fois dans la suite, alors a_0 est un multiple de 3 (par contraposée).

Si a_0 est un multiple de 3, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_0 = 3k$. Tant que a_0 n'est pas un carré, on va ajouter des 3 (on va potentiellement n'ajouter aucun 3, si a_0 est déjà un carré). Tous les termes sont alors les multiples de 3 à partir de $3k$. En particulier, on va ajouter des 3 jusqu'à arriver à un carré parfait divisible par 3, disons à l'indice m, on aura alors $a_m = 9j^2$ pour un j entier, car tout carré divisible par 3 s'écrit sous cette forme. Dans ce cas, on a $a_{m+1} = \sqrt{9j^2} = 3j$. Cependant, on remarque que $a_{m+1} = 3j < 9(j-1)^2$ pour $j > 1$, qui est exactement le carré divisible par 3 précédant $9j^2$. Ainsi, on va de nouveau ajouter des 3 jusqu'à arriver à un carré divisible par 3 plus petit ou égal à $9(j-1)^2$, et on va au final descendre comme cela jusqu'à que, pour un certain indice p, on ait alors $a_p = 9$. A partir de là, $a_{p+1} = 3$, $a_{p+2} = 6, a_{p+3} = 9$ et la suite est périodique de période $(3, 6, 9)$ et donc 3 apparaît bien une infinité de fois.

Conclusion :

$$Card(n|a_n = 3) = +\infty \iff 3 \mid a_0$$